EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Partie B

1) $\frac{c}{b} = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(2-2i)}{8} = \frac{-4i}{8} = -\frac{i}{2}$ est imaginaire pur

d'où $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux donc OBC est un triangle rectangle en O

2) $|b| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donc $b = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right) = \arg(b) = \frac{\pi}{4}$$

$|c| = \sqrt{2}$ donc $c = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OC};\vec{u}\right) \ (2\pi) \quad \text{donc} \quad \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$$

$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ donc (OA) est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)$

3) a. Le nombre complexe dont le module est 1 et dont un argument est $-\frac{\pi}{2}$ est $-i$

On a donc $\frac{c-d}{c} = -i \Leftrightarrow c - d = -ic \Leftrightarrow d = c + ic \Leftrightarrow d = c(1+i) \Leftrightarrow d = (1-i)(1+i)$

donc d = 2.

b. $\left|\frac{c-d}{c}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{DC}{OC} = 1 \Leftrightarrow OC = CD$

$$\arg\left(\frac{c-d}{c}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{DC}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad (OC) \perp (CD)$$

Puisque l'on a $(OC) \perp (CD)$ et $(OC) \perp (OB)$, on en déduit que les droites (OB) et (CD) sont parallèles .

OCDB est donc un trapèze rectangle et isocèle en C